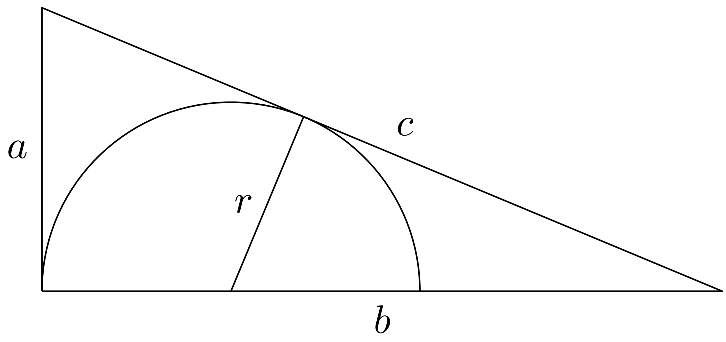
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2019–2020

Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Finnið minnsta mögulega teljara brotsins $\dfrac{n}{9}$ þannig að $\dfrac{1}{2} < \dfrac{n}{9}$.

☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6

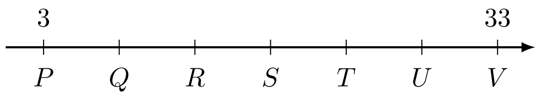
Skýring: Þar sem $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4.5}{9} < \dfrac{n}{9}$ er ljóst að minnsta mögulega gildið á n er 5.

2. Heiltölurnar p, q, r og s eru fjórar samliggjandi tölur (dæmi um fjórar samliggjandi tölur eru 3, 4, 5, 6) þar sem p er lægst og s er hæst. Ef $p + s = 109$, hver er þá summan $q + r$?

☐ 108 ☒ 109 ☐ 110 ☐ 111

Skýring: Fjórar samliggjandi heiltölur eru $n, n+1, n+2, n+3$. Gefið er að $n + (n+3) = 109$; þ.e. $2n + 3 = 109$ og þá er $(n+1) + (n+2) = 2n + 3$ líka 109

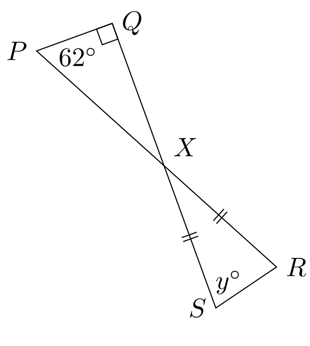
3. Á talnalínunni er punktur P í 3 og punktur V í 33. Bilinu frá P til V er skipt í 6 jafna hluta með punktunum Q, R, S, T og U eins og sýnt er. Hver er summa lengdanna PS og TV ?



☐ 21 ☐ 23 ☒ 25 ☐ 27

Skýring: Ef hver hluti er af lengd x þá er $3 + 6x = 33$ og því $x = 5$. Þá er $PS = 3x = 15$ og $TV = 2x = 10$. Summa lengdanna er því $15 + 10 = 25$

4. Á myndinni skerast PR og QS í X. Þríhyrningurinn PQX er rétthyrndur, $\angle PQX = 90°$ og $\angle QPX = 62°$ eins og sýnt er. Þríhyrningurinn RXS er jafnarma með $RX = SX$ og $\angle XSR = y°$. Hvert er gildið á y?



☐ 59 ☐ 60 ☐ 71 ☒ 76

Skýring: Í þríhyrningi PQX er $\angle PXQ = 180° - 90° - 62° = 28°$, svo hornið $\angle RXS$ er líka 108°. En þríhyrningur RXS er jafnarma svo $\angle XSR = y° = \angle XRS$. Því fæst $28° + 2y° = 180°$ svo $y° = 76°$.

5. 28 nemendur tóku þátt í stærðfræðikeppni. Fjöldi nemenda sem voru í lægra sæti en Ragnar var tvöfalt meiri en fjöldi nemenda sem voru í sætum fyrir ofan hann. Í hvaða sæti lenti Ragnar?

☐ 9. ☒ 10. ☐ 17. ☐ 18.

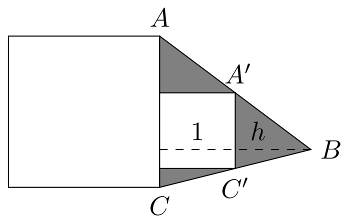
Skýring: Táknum fjölda nemenda fyrir ofan Ragnar með x. Þá er heildarfjöldi nemenda í keppninni, að Ragnari meðtöldum $2x + 1 + x = 28$. Þá er $x = 9$ svo Ragnar lenti í 10 sæti.

6. Talan 8^8 fæst með því að setja 4^4 í n-ta veldi þar sem n er

☐ 2 ☒ 3 ☐ 5 ☐ 8

Skýring: Velja á n þannig að $8^8 = (4^4)^n$. Með veldareglum má umrita báðar hliðarjöfnunnar: $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} = 4^{12}$ og $(4^4)^n = 4^{4n}$ Samanburður veldisvísa gefur $n = 3$.

7. Á myndinni sést lítill ferningur með hliðarlengd 1 m og stór ferningur með hliðarlengd 2 m og eina hlið AC. Tveir hornpunktar litla ferningsins liggja á hliðum þríhyrningsins ABC eins og sést á myndinni. Hvert er flatarmál gráa svæðisins?



☒ $1\,\mathrm{m}^2$ ☐ $2\,\mathrm{m}^2$ ☐ $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$ ☐ Fer eftir staðsetningu litla ferningsins

Skýring: Þríhyrningarnir ABC og $A'BC'$ eru einslaga með grunnlínur AB og $A'B'$ í hlutföllum $2:1$. Hæðir þríhyrninganna $h+1$ og h eru í sömu hlutföllum, $\frac{h+1}{h} = 2$, svo $h = 1$, óháð staðsetningu litla ferningsins. Flatarmál ABC er því helmingur af flatarmáli stóra ferningsins eða 2 og því skyggða svæðið að flatarmáli 1.

8. Sex börn borða samtals 20 vínber. Andri borðar eitt vínber, Binni borðar tvö vínber, Dóra borðar þrjú vínber. Erpur borðar flest vínber allra, enginn borðar jafnmörg vínber og hann. . Hver er minnsti mögulegi fjöldi vínberja sem Erpur getur hafa borðað?

☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7

Skýring: Andri, Binni og Dóra borða samtals 6 vínber. Erpur og tvö önnur börn, sem við köllum X og Y, borða því samtals 14 vínber. Erpur getur ekki hafa borðað 5 vínber því þá hefur annað hvort barnanna X eða Y borðað a.m.k.

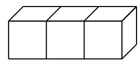
5 vínber. Mögulegt er að Erpur hafi borðað 6 vínber og þá X og Y samanlagt 8 vínber, fjögur hvort.

9. Í rétthyrndum þríhyrningi eru hliðarlengdir a, $a + d$ og $a + 2d$ þar sem a og d eru jákvæðar tölur. Hvert er hlutfallið $\dfrac{a}{d}$?

☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Skýring: Þríhyrningur með hliðarlengdir 3, 4 og 5 er rétthyrndur; með $a = 3$ og $d = 1$. Hlutfallið a/d er því 3.

10. Þremur einslaga teningum er raðað saman í einfalda röð, eins og sést á mynd með eina hlið niður. Teningarnir hafa þá alls 11 sjáanlegar hliðar. Ef sextíu svona teningum er raðað saman í einfalda röð, hve margar hliðar verða sjáanlegar?

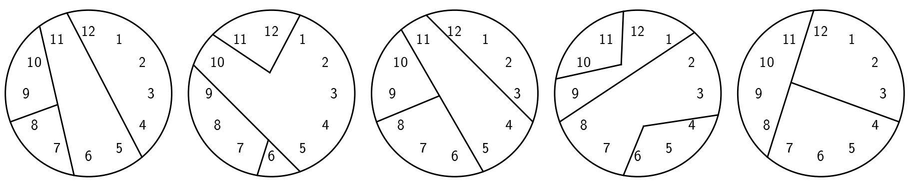


☐ 125 ☒ 182 ☐ 200 ☐ 220

Skýring: Á hverjum teningi sem ekki er endateningur eru þrjár hliðar sýnilegar og á hvorum endateninganna eru fjórar hliðar sýnilegar. Fjöldi sýnilegra hliða er því alltaf (þrefaldur fjöldi teninga + 2). Sér í lagi fæst að ef fjöldi teninga er 60 þá sjást alls $60 \times 3 + 2 = 182$ hliðar.

Annar hluti

11. Úrið hans Jonna datt og glerið brotnaði í fjóra hluta. Summur talnanna í hverjum hluta eru samliggjandi. Hver eftirtalinna mynda sýnir úrið hans Jonna?



(a) (b) (c) (d) (e)

☐ a ☐ b ☒ c ☐ d ☐ e

Skýring: Með samlagningu talnanna í hverju broti á úri fæst að aðeins summurnar í úri (c) eru samliggjandi heiltölur 18, 19, 20 og 21.

12. Í mælaborði bíls stendur fjöldi ekinna kílómetra 187569. Allir tölustafirnir eru ólíkir. Eftir hversu marga kílómetra gerist þetta næst?

☐ 1 ☒ 21 ☐ 431 ☐ 12431 ☐ 13776

Skýring: Alls ekki eftir 1 km því þá sýnir mælirinn 187570 með tvær tölur eins. Eftir 21 km sýnir mælirinn 187590; allar tölur ólíkar.

13. Bókstöfunum A, B, C, D og E er raðað í 5×5 töflu þannig að hver stafur kemur nákvæmlega einu sinni fyrir í hverri línu og í hverjum dálki. Hvaða bókstafur á að vera þar sem $*$ er?

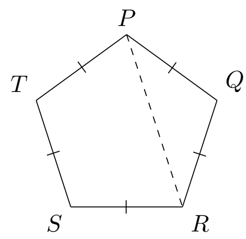
A				E
		C	A	
E		B	C	
	$*$			
B			D	

☐ A ☒ B ☐ C ☐ D ☐ E

Skýring: Fylla þarf í töfluna þar til ótvíræður bókstafur velst í stað $*$. Þessu má ná fram á mismunandi vegu en hér sést útkoman.

A	C	D	B	E
D	E	C	A	B
E	D	B	C	A
C	B	A	E	D
B	A	E	D	C

14. Í reglulegum fimmhyrningi eru öll horn 108°. Myndin sýnir reglulegan fimmhyrning $PQRST$. Hver er stærð hornsins $\angle PRS$?



☐ 45° ☐ 54° ☐ 60° ☒ 72° ☐ 80°

Skýring: Þríhyrningur PQR er jafnarma með topphorn 108° og grunnhorn $\angle QPR = \angle QRP = (180° - 108°)/2 = 36°$. Þá er $\angle PRS = 108° - 36° = 72°$

15. Hver er 2019. stafurinn í stafarununni KEPPNIKEPPNIKEPPNI...?

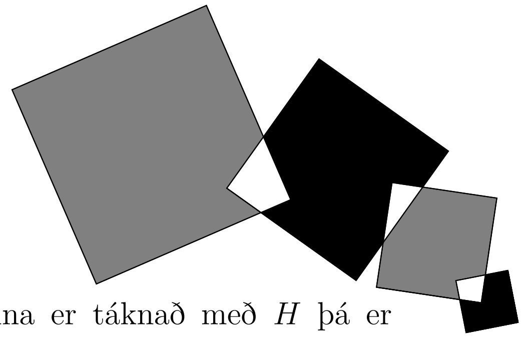
☐ K ☐ E ☒ P ☐ N ☐ I

Skýring: Áður en að 2019. stafnum kemur er sex stafa orðið endurtekið eins mörgum sinnum og 6 gengur upp í 2019, en $\frac{2019}{6} = 336 + \frac{1}{2}$ svo orðið er endurtekið alls 336 sinnum. Það eru alls $336 \cdot 6 = 2016$ stafir. Þrjá stafi í viðbót þarf í 2019, stafina KEP, svo P er stafur númer 2019 í þessari runu.

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvíræætt svar fæst ekkert stig.

16. Á myndinni sjást fjórir ferningar með hliðarlengdir 5, 7, 9 og 11. Hversu miklu stærra er flatarmál gráu svæðanna heldur en flatarmál svörtu svæðanna?



Svar: 64

Skýring: Ef samanlagt flatarmál hvítu svæðanna er táknað með H þá er samanlagt flatarmál gráu svæðanna $(11^2 + 7^2 - H)$ og samanlagt flatarmál svörtu svæðanna $(9^2 + 5^2 - H)$. Mismunur flatarmála þessara svæða er því $(11^2 + 7^2 - H) - (9^2 + 5^2 - H) = 11^2 + 7^2 - 9^2 - 5^2 = 64$.

17. Þrjár jákvæðar heiltölur a, b og c eru þannig að

$$4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$$

Hver er summan $a + b + c$?

Svar: 36

Skýring: Vinstri hlið má rita $2^{2a} \cdot 5^b \cdot 2^c 3^c = 2^{2a+c} 5^b 3^c$ og hægri hlið má rita $2^{24} \cdot 3^{18} \cdot 2^{10} 5^{10} = 2^{34} 5^{10} 3^{18}$. Samanburður veldisvísa gefur $b = 10$, $c = 18$ og $2a + c = 34$ og því $a = 8$. Þá er $a + b + c = 8 + 10 + 18 = 36$.

18. Hringur, ferningur og þríhyrningur eru teiknaðir hver ofan á annan á sama blað. Hver er mesti mögulegi fjöldi skurðpunkta sem þessi grunnform mynda?

Svar: 20

Skýring: Ferningurinn getur skorið hringinn tvisvar á hverri hlið. Þríhyrningurinn getur skorið hringinn tvisvar á hverri hlið. Þríhyrningurinn getur skorið ferninginn tvisvar á hverri hlið. Samtals $8 + 6 + 6 = 20$ skurðpunktar.

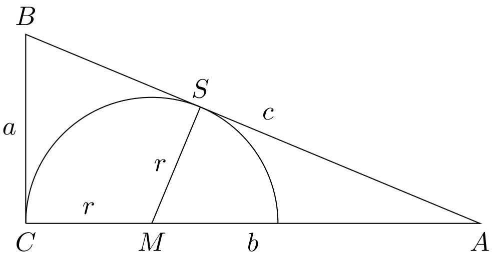
19. Hversu margar jákvæðar fjögurra stafa heiltölur $5u4v$, með 5 í þúsundasætinu og 4 í tugasætinu, eru deilanlegar með 15?

Svar: 7

Skýring: Til að 5 gangi upp í tölunni verður hún að enda á 0 eða 5. Til að 3 gangi upp í tölunni verður 3 að ganga upp í þversummunni. Ef $v = 0$ verður þversumman $5 + u + 4 + 0 = 9 + u$ og þar sem 3 gengur upp í 9 þá verða 3 að ganga upp í u. Tölustafurinn u er því einhver talnanna í $\{0, 3, 6, 9\}$; alls 4 möguleikar. Ef $v = 5$ þá verður þversumman $5 + u + 4 + 5 = u + 14$ til að u gangi upp í þessa summu þarf u að tilheyra menginu $\{1, 4, 7\}$; alls 3 möguleikar.

Samanlagt eru því $4 + 3 = 7$ mismunandi jákvæðar fjögurra stafa tölur $5u4v$ sem eru deilanlegar með 15.

20. Hálfhringur er innritaður í rétthyrndan þríhyrning með hliðarlengdir $a < b < c$, eins og sést á mynd. Finnið geisla (radíus) hálfhringsins og táknið hann með a, b og c.



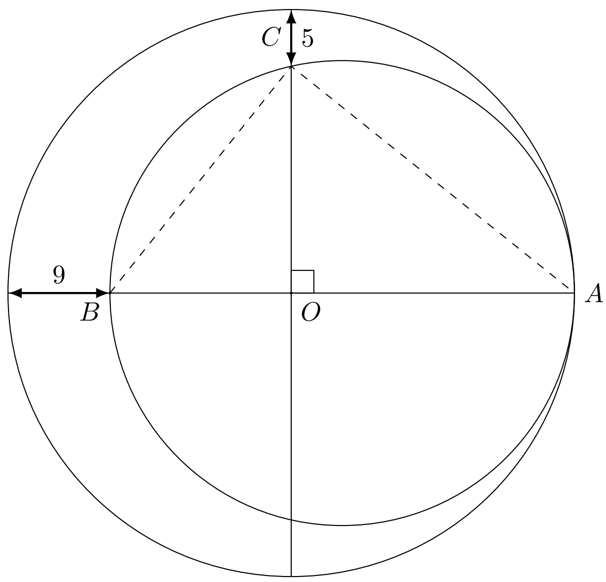
Svar: $\dfrac{ac - a^2}{b}$ eða $\dfrac{ab}{c + a}$

Skýring: Köllum miðpunkt hálfhringsins M og punkt á c sem geisli hringsins snertir S. Þríhyrningarnir ABC og AMS eru einslaga. Þar sem BC og BS eru snertlar við hringinn með miðju í M og $|BS| = a$ þá er $|AS| = c - a$. Hlutföll milli skammhliða ABC og AMS gefa þá að $\frac{r}{c-a} = \frac{a}{b}$ og því fæst $r = \frac{ac-a^2}{b}$.

Eins má sjá að $|MA| = b - r$ og því fást jöfn hlutföll $\frac{r}{b-r} = \frac{a}{c}$ og því $rc = ab - ar$ sem gefur $r = \frac{ab}{c+a}$

Fjórði hluti

21. Myndin sýnir hring innritaðan í stærri hring þannig að þeir snertast í punkti A. Tveir miðstrengir stærri hringsins eru sýndir og fellur miðstrengur minni hrings í miðstreng þess stærri. Þeir hlutar miðstrengja stærri hringsins, sem liggja utan minni hringsins eru af lengd 5 og 9, eins og sýnt er á mynd. Hver er geisli (radíus) stærri hringsins?



Lausn: Táknum geisla stærri hringsins með R. Takið eftir að þríhyrningur ABC er rétthyrndur þríhyrningur þar sem AB er miðstrengur.

Aðferð I, einslaga þríhyrningar: Þríhyrningarnir BOC, BCA og COA eru allir einslaga. Sér í lagi gilda eftirfarandi hlutföll skammhliða í þríhyrningum BOC og COA:

$$\frac{|BO|}{|OC|} = \frac{|CO|}{|OA|} \quad \text{svo} \quad \frac{R-9}{R-5} = \frac{R-5}{R}$$

Þá er $R(R-9) = (R-5)^2$ og því $R = 25$.

Aðferð II, regla Pýþagórasar: Þar sem þríhyrningur ABC er rétthyrndur er

$$|AB|^2| = BC|^2 + |CA|^2$$

En

$$\begin{aligned} & |AB|^2 = (2R-9)^2 \\ & |BC|^2 = OB^2 + OC^2 = (R-9)^2 + (R-5)^2 \\ \text{og} \quad & |CA|^2 = OC^2 + OA^2 = (R-5)^2 + R^2 \end{aligned}$$

Þá fæst:

$$\begin{aligned} (2R-9)^2 &= \Big[(R-9)^2 + (R-5)^2\Big] + \Big[(R-5)^2 + R^2\Big] \\ -36R + 81 &= [-18R + 81 - 10R + 25] + [-10R + 25] \\ 2R &= 50 \qquad \text{svo} \quad R = 25 \end{aligned}$$

22. Á borði liggja 40 gulir, 40 rauðir og 40 bláir kubbar. Arnar og Brynja spila með eftirfarandi leikreglum. Í hverjum leik þarf leikmaður að taka tvo kubba af leikborðinu, sem mega þó ekki vera rauður og blár saman. Leikmaður tapar ef engir kubbar eru eftir þegar hann á leik eða hann getur ekki tekið kubba af borðinu. Arnar byrjar. Hvernig getur Brynja tryggt sér sigur í leiknum?

Lausn: Brynja getur tryggt sér sigur í leiknum með því að gæta þess að ávallt sé sléttur fjöldi kubba af hverri tegund eftir á borðinu. Sýnum fyrst að þetta sé mögulegt. Í byrjun er sléttur fjöldi af hverri tegund. Ef Arnar tekur tvo mismunandi kubba þá tekur Brynja nákvæmlega eins kubba og hann. Þetta er mögulegt af því að í byrjun var sléttur fjöldi af hverri tegund og Arnar tók bara einn af hvoru tagi. Ef Arnar tekur tvo eins kubba þá tekur Brynja líka tvo eins kubba (ekki nauðsynlega af sömu tegund og Arnar tók). Þetta er mögulegt eins lengi og kubbar eru eftir, þar sem eftir að Arnar tekur tvo eins kubba verður að vera áfram sléttur fjöldi af hverri tegund. Svona tryggir Brynja ávallt sléttan fjölda af hverri tegund í borði eftir að hún hefur gert. Brynja getur því fylgt þessari leikáætlun svo lengi sem kubbar eru eftir þegar hún á að gera. sýnum næst að þetta leiði til sigurs. Tökum eftir að 4 gengur upp í fjölda kubba af hverri tegund. Þegar Brynja á að gera eru því ávallt minnst tveir kubbar eftir. Brynja getur með öðrum orðum alltaf gert. Því tapar Arnar þegar Brynja fylgir þessari leikáætlun.