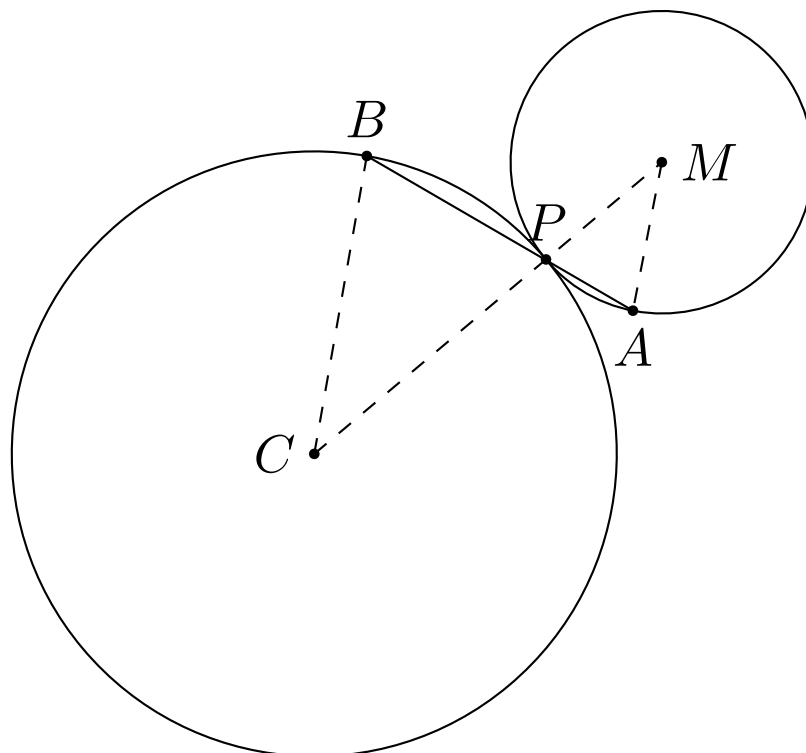


Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2016–2017

Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Edda telur fætur og hala á öllum kúm í dýragarðinum. Fæturnir reynast vera 18 fleiri en halarnir. Hversu margar kýr eru í dýragarðinum?

 3

 6

 8

 9

Skýring: Ef x er fjöldi kúa þá fæst þar sem hver þeirra hefur fjóra fætur að $4x = x + 18$ og því $3x = 18$ svo kýrnar eru 6 talsins.

2. Hliðarlengdir pappakassa eru mældar í metrum. Hliðarlengdirnar eru heiltölur sem eru í hlutföllunum 1 : 3 : 4. Hver af eftirfarandi tölum getur verið rúmmál kassans, mælt í rúmmetrum?

 48

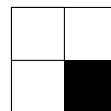
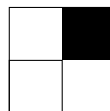
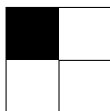
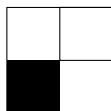
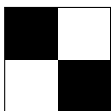
 56

 64

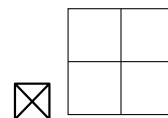
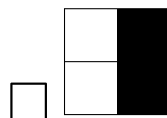
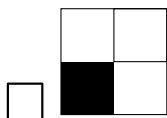
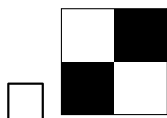
 96

Skýring: Svo hlutföllin haldist rétt er mögulegt rúmmál kassans $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ eða $2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$ eða stærra.

3. Gutti setur saman tening úr alhvítum og alsvörtum einingarkubbum. Hér sjást fimm hliðar teningsins hans Gutta.



Hvernig lítur sjötta hliðin út?



Skýring: Þrjár hliðar hvers svarts einingarkubbs eru sýnilegar í teningnum hans Gutta. Á hliðunum 5 sjást 6 svartir reitir svo 2 svartir einingarkubbar eru hluti af teningnum. Sjötta hliðin getur ekki bætt við heilum svörtum einingarkubbi ein og sér og því getur ekki verið um fleiri svarta reiti að ræða.

4. Meðalaldur fjögurra frænda Auðuns er 8 ár og miðgildið er 5 ár. Hver er samantlagður aldur yngsta og elsta frændans í árum?

 13

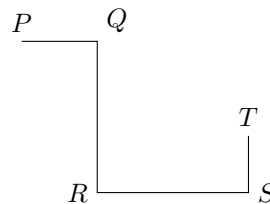
 16

 22

 25

Skýring: Fáum að $\frac{a+b+c+d}{4} = 8$ og $\frac{b+c}{2} = 5$ svo $b + c = 10$ og því $a + d = 22$.

5. Á myndinni er PQ hornrétt á QR , QR er hornrétt á RS og RS er hornrétt á ST . Ef $PQ = 4$ m, $QR = 8$ m, $RS = 8$ m og $ST = 3$ m, hver er þá lengd PT ?



- 12 m 13 m 15 m 16 m

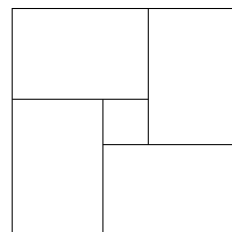
Skýring: Framlengjum PQ og ST þannig að þær mætist í punkti U . Rétt-hyrndi þríhyrningurinn PTU er með skammhliðar með lengdir $8 + 4 = 12$ og $8 - 3 = 5$ svo regla Pýþagórasar gefur að PT er 13 að lengd.

6. Ef $n * m = n^3 m^2$ hvað er þá $\frac{2 * 4}{4 * 2}$?

- $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2

Skýring: $\frac{2 * 4}{4 * 2} = \frac{2^3 \cdot 4^2}{4^3 \cdot 2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

7. Stórum ferningi er skipt í fjóra rétthyrninga og einn lítinn ferning líkt og sést á myndinni. Ummál hvers rétthyrninganna fjögurra er 16 cm. Hvert er ummál stóra ferningsins?



- 20 cm 24 cm 28 cm 32 cm

Skýring: Helmingur ummáls hvers rétthyrnings er 8 cm. Við höfum fjóra rétthyrninga og því er ummál stóra ferningsins 32 cm.

8. Þórunn skoraði 36 stig í síðasta körfuboltaleik. Þetta varð til þess að meðalskor hennar hækkaði úr 20 í 21 stig. Hversu mörg stig þarf hún að skora í næsta leik til að meðalskor hennar verði 22 stig?

- 36 38 40 42

Skýring: Hafi Þórunn spilað alls n leiki fyrir þann síðasta og skorað alls x stig í þeim leikjum fæst að

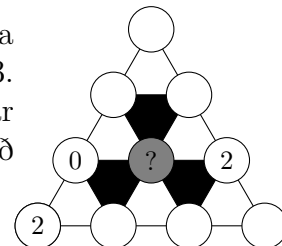
$$\frac{x}{n} = 20 \quad \text{og} \quad \frac{x + 36}{n + 1} = 21$$

Fyrri jöfnuna má rita $x = 20n$ og þá verður seinni jafnan $20n + 36 = 21(n + 1)$. Því er $n = 15$ og þá $x = 20 \cdot 15 = 300$. Síðasti leikur Þórunnar var sá $(n + 1) = 16$

og í fyrstu 16 leikjunum hefur hún skorað alls $x+36 = 336$ stig. Til að meðalskor hækki í 22 eftir næsta leik þarf þórunn að skora y stig þar sem

$$\frac{336 + y}{17} = 22 \quad \text{svo} \quad y = 38$$

9. Rita skal tölurnar 0,1 eða 2 í hvern þessara hringa. Summa hverra þriggja hornpunkta hvítra þríhyrninga skal vera deilanleg með 3. Summa hverra þriggja hornpunkta svartra þríhyrninga á hins vegar ekki að vera deilanleg með þremur. Hvaða tala eða tölur geta passað í hringinn í miðjunni?



bara 0

bara 1

bara 2

0 eða 1

Skýring:

Til þess að hvíti þríhyrningurinn neðst til vinstri fái summu hornpunkta sem deilanleg er með 3 þá þarf að velja 1 í auða reitinn til hægri við tvistinn. Til þess að svarti þríhyrningurinn hafi hornasummu sem ekki er deilanleg með 3 má þá ekki standa 2 í gráa reitnum. Fyrst kann því að virðast sem bæði 0 og 1 passi í gráa reitinn. Séu hins vegar reitirnir ofan gráa reitsins skoðaðir kemur í ljós að sé 1 í gráa reitnum þá verður að velja 2 ská ofan til vinstri og þá 0 ská ofan til hægri sem gengur ekki. Ef 0 er í gráa reitnum má velja 0 ofan til vinstri og 1 ofan til hægri og 2 efst án vandræða.

10. Í bæ nokkrum búa hrappar sem alltaf ljúga og heiðursmenn sem alltaf segja satt. Bæjarbúar vita vel hver tilheyrir hvorum hópnunum en sama máli gegnir ekki um aðkomumenn. Jónatan var nýkominn til bæjarins og hitti á bæjartorginu sjö manns sem sátu við hringborð. Jónatan spurði hvort hrappar sætu við borðið og gall þá í einum „Ég sit milli tveggja hrappa!“. Í kjölfarið sagði hver hinna sem við borðið sátu „Ég sit líka milli tveggja hrappa!“ Hversu margir hrappar sátu við borðið?

3

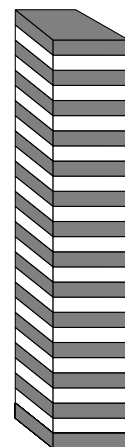
4

5

Ekki hægt að segja til um það

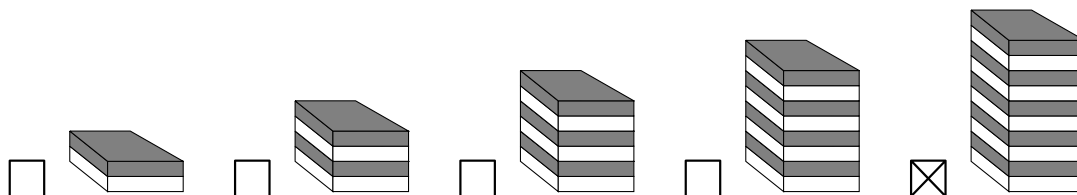
Skýring: Upphrópun sjömenninganna gefur að þar sem hrappar ljúga alltaf þá geta ekki allir við borðið verið hrappar og ekki heldur allir verið heiðursmenn. Heiðursmenn verða að hafa hrapp á hvora hönd (enda segja þeir alltaf satt) og hrappar verða að hafa a.m.k. einn heiðursmann sér við hlið. Setjum heiðursmann við borðið og þá hrappa sinn á hvora hönd hans. Við getum ekki sett annan hrapp við hlið þeirra beggja þar sem einungis tvö sæti væru þá eftir og aldrei mega þrír hrappar sitja saman í röð (þá væri miðju-hrappurinn að segja satt en hrappar ljúga alltaf) eða tveir heiðursmenn sitja saman. Sama hvort við setjum tvo heiðursmenn eða einn heiðursmann og einn hrapp við hlið

hrappanna sem fyrir eru þá fáum við sama mynstur með fjórum hröppum og þremur heiðursmönnum.



Annar hluti

11. Stella byggir turn úr 27 jafnstórum kubbum. Hún skiptir turninum í 2 hluta þannig að annar hlutinn er tvöfalt stærri en hinn. Annan af þessum tveimur hlutatum tekur hún því næst og skiptir í tvo hluta þannig að annar hlutinn er tvöfalt stærri en hinn. Þetta endurtekur hún síðan í þriðja skiptið. Hvern af eftirfarandi bútum er útilokað að Stella hafi náð að mynda í einhverri af skiptingunum þremur?



Skýring: Eftir fyrstu skiptingu hefur Stella turna af lengdum 9 og 18. Eftir því hvorum turnanna hún skiptir næst þá fær hún annað hvort turna af lengdum 3 og 6 eða 6 og 12. Eftir því hvaða turnum hún skiptir í þriðja skiptið fær hún turna af lengdum 1 og 2 eða 2 og 4 eða 4 og 8. Aldrei fæst því turn af lengd 10.

12. Á pappírslæmu stendur talan 2581953764. Erla sker ræmuna í 3 hluta þannig að talan skiptist í 3 tölur sem gefa eins litla summu og mögulegt er. Hver er þessi summa?

2878 2975 3775 4217 4298

Skýring: Talan hefur 10 tölustafi. Til þess að fá sem minnsta summu þarf að skipta tölunni í búta af lengdum 3, 3 og 4. Búturinn af lengd 4 þyrfti að hefjast á tölustafnum 1 ef mögulegt er svo við fáum skiptingu í 258, 1953 og 764 sem gefur summuna 2975. Jafnvel þótt fjögurra stafa talan væri 2581 þá sjáum við að 953 og 764 myndu gefa hærri summu.

13. Úrið hennar Regínu er 10 mínútum of seint en Regína heldur að það sé 5 mínútum of fljótt. Úrið hans Jóa er 5 mínútum of fljótt en hann heldur að það sé 10 mínútum of seint. Hvað heldur Jói að klukkan sé þegar Regína heldur að klukkan sé 12?

11:30 11:45 12:00 12:30 12:45

Skýring: Fyrst Regína heldur að klukkan sé 12 þá sýnir úrið hennar 12:05 og þá er klukkan í raun 12:15. Þá sýnir úr Jóa 12:20 og Jói heldur þá að klukkan sé 12:30.

14. Stefanía skrifaði forrit til að flokka tölur eftir stærð. Summurnar hér til hliðar eru nú þegar í stærðarröð. Hvar í röðinni er talan $x + y + z$?

| |
|----------------|
| 1. $z + z + y$ |
| 2. $x + x + y$ |
| 3. $y + y + z$ |
| 4. $y + y + x$ |

Á undan 1. summu
 Á milli 1. og 2. summu
 Á milli 2. og 3. summu
 Á milli 3. og 4. summu
 Á eftir 4. summu

Skýring: Sjáum að allar summurnar innihalda y . Ef við tökum y burt úr hverri summu og bætum z við þá sést að $x + y + z$ lendir fyrir neðan $y + z + z$ sem er sú summa sem var í 1. sæti. Vitum því að $x + y + z$ er neðar en 1. summan. Ef við hefðum ekki bætt við z heldur x þá sést að $x + y + z$ er stærra en $x + x + y$ og því verður summan $x + y + z$ að vera milli 1. og 2. summu.

15. Iðnaðarmennirnir Stjáni, Inga, Adda og Ragnar sitja við hringlaga borð. Hvert þeirra gegnir einu eftirfarandi starfa og hefur ekkert þeirra sama starf: smiður, pípari, málari og rafvirki. Píparinn situr vinstra megin við Stjána. Smiðurinn situr á móti Ingu. Adda og Ragnar sitja hlið við hlið. Vinstra megin við málara situr Stjáni eða Adda. Hvaða starfi gegnir Adda?

Smiður
 Pípari
 Málari
 Rafvirki
 Ekki hægt að segja til um það

Skýring: Setjum Stjána við borðið og þá píparann vinstra megin við hann. Þar sem Adda og Ragnar sitja hlið við hlið þá getur Inga ekki setið á móti Stjána. Þar sem smiðurinn situr á móti Ingu þá verður píparinn að heita Inga. Þá er smiðurinn hægra megin við Stjána og þar sem Stjáni eða Adda situr vinstra megin við málara og ljóst er að málara situr á móti Stjána, þá verður Adda að vera smiðurinn.

Þriðji hluti

16. Talnarunan $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ er þannig að bilið milli aðliggjandi talna lengist alltaf um 1. Hver er sextugasta og þriðja talan í rununni?

Svar: 2016

Skýring: Táknum tölu númer n í rununni með u_n . Þá gildir að

$$u_n = u_{n-1} + n = u_{n-2} + (n-1) + n = \dots = u_1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

En $u_1 = 1$ og því er $u_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Þá er ljóst sextugasta og þriðja talan í rununni er $u_{63} = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2016$.

17. 10 keppendur eru á tennismóti. Á hve marga vegu er hægt að útfæra fyrstu umferð; umferð fyrstu 5 leikja?

Svar: 945

Skýring: Fyrsti keppandi hefur 9 mögulega andstæðinga. Þá eru 8 eftir og næsti lausi keppandi hefur því 7 mögulega andstæðinga. Síðan eru 5 möguleikar og svo 3. Síðasti lausi keppandinn hefur þá aðeins einn mögulegan andstæðing. Fyrstu umferð má því útfæra á alls $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$ mögulega vegu.

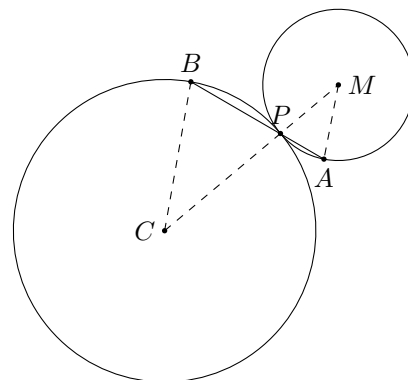
18. Tveir hringar snertast í punkti P . Stærri hringurinn hefur radíus 4 og sá minni hefur radíus 2. Strik úr punkti $A \neq P$ á minni hringnum liggur í gegnum snertipunktinn P og yfir í punkt $B \neq P$ á stærri hringnum. Lengd AB er 4. Finnið lengd PB .

Svar: $\frac{8}{3}$

Skýring: Köllum miðjur hringanna C og M . Táknum BP með x . Þá er $PA = 4 - x$. Þríhyrningarnir CPB og MPA eru jafnarma og þar með einslaga. Því fást hlutföllin

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PC} \quad \text{eða} \quad \frac{4-x}{x} = \frac{2}{4}$$

Þá er $4(4-x) = 2x$ og því $6x = 16$. Svo $x = 8/3$.



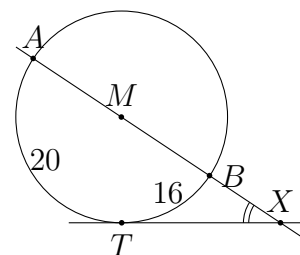
19. Gutti finnur gamlan reikning fyrir 72 eins stílabókum en einungis tveir tölustafir í miðju fjögurra stafa upphæðarinnar eru læsilegir: 39. Hvaða upphæð stóð á reikningnum?

Svar: 4392

Skýring: Til að upphæðin sé deilanleg með 72 þarf hún að vera deilanleg með bæði 8 og 9. Til að talan sé deilanleg með 8 þarf þriggja stafa talan sem stendur aftast að vera deilanleg með 8, hún getur því aðeins hafa verið 392. Til að talan sé deilanleg með 9 þarf þversumma hennar (summa tölustafa) sömuleiðis að vera deilanleg með 9 og $3+9+2 = 14$ og eini möguleikinn er að fyrsti stafurinn hafi verið 4 og þversumman 18. Upphæðin var 4392.

20. Lína AB liggur gegnum M , miðpunkt hrings. Snertill við hringinn í punkti T sker línuna AB í punktinum X . Bogginn AT er 20 cm langur og bogginn TB er 16 cm langur (myndin er ekki í réttum hlutföllum). Hversu stórt er hornið $\angle AXT$?

Svar: 10°



Skýring: Þar sem 36 cm spanna 180° þá spannar hver cm 5° . 16 cm boginn spannar því $16 \cdot 5 = 80$ gráður svo hornið $\angle XMT = 80^\circ$. Þríhyrningurinn XTM er rétthyrndur svo hornið X er 10° .

Fjórði hluti

21. Kári Lyng var allvel stæður þegar hann féll frá. Hann lét börnunum sínum sex eftir drjúgan arf en setti sérstök skilyrði fyrir skiptingu hans.

- Bjarni átti að fá tvöfalt á við Ása.
- Davíð átti að fá þrefalt á við Ása.
- Erla átti að fá helming af því sem Fríða fengi.
- Gréta átti að fá þriðjung af því sem Fríða fengi.
- Samtals áttu bræðurnir þrír að fá jafnmikið og systurnar þrjár.
- Bjarni átti að fá 8 milljónum meira en Erla.

Hver var upphæðin sem Kári Lyng lét eftir sig?

Lausn: Ef við látum x tákna upphæðina sem Ási erfði, þá fékk Bjarni $2x$, Davíð $3x$ og bræðurnir samtals $x + 2x + 3x = 6x$. Ef við látum y tákna upphæðina sem Fríða erfði, þá fékk Erla $\frac{1}{2}y$, Gréta $\frac{1}{3}y$ og systurnar samtals $y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y = \frac{11}{6}y$. Bræðurnir þrír áttu að fá jafnmikið og systurnar þrjár svo að $6x = \frac{11}{6}y$ eða $x = \frac{11}{36}y$. Forsendur gefa líka að Bjarni átti að fá 8 milljónum meira en Erla, svo $2x = \frac{1}{2}y + 8$ (hér er reiknað í milljónum) eða $x = \frac{1}{4}y + 4$. Fyrst

$$x = \frac{11}{36}y \quad \text{og} \quad x = \frac{1}{4}y + 4$$

þá fæst jafnan $\frac{11}{36}y = \frac{1}{4}y + 4$ sem gefur $11y = 9y + 144$ eða $2y = 144$ svo $y = 72$. Þá er $x = \frac{11}{36} \cdot 72 = 22$. Heildarupphæðin sem Kári Lyng lét eftir sig er $12x$ eða 264 milljónir. (Og skiptist þannig. Ási: 22, Bjarni: 44, Davíð: 66, Fríða: 72, Erla: 36 og Gréta: 24.)

22. Hringur er innritaður í jafnarma þríhyrning ABC . Stríkið AP fer í gegnum miðju hringsins, $AC = AB = 12$ og $BP = 4$. Hver er radíus hringsins?

Lausn: Táknum radíus hringsins með r , miðju með M og látum Q tákna snertipunkt hringsins og hliðarinnar AC . Þá er $QC = PC = 4$ og því $AQ = 8$. Þar sem þríhyrningarnir AQM og APC eru einslaga fæst

$$\frac{r}{AQ} = \frac{PC}{AP} \quad \text{svo} \quad r = AQ \cdot \frac{PC}{AP} = 8 \cdot \frac{4}{AP}$$

En $AP = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$, svo $r = 8 \cdot \frac{4}{8\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

