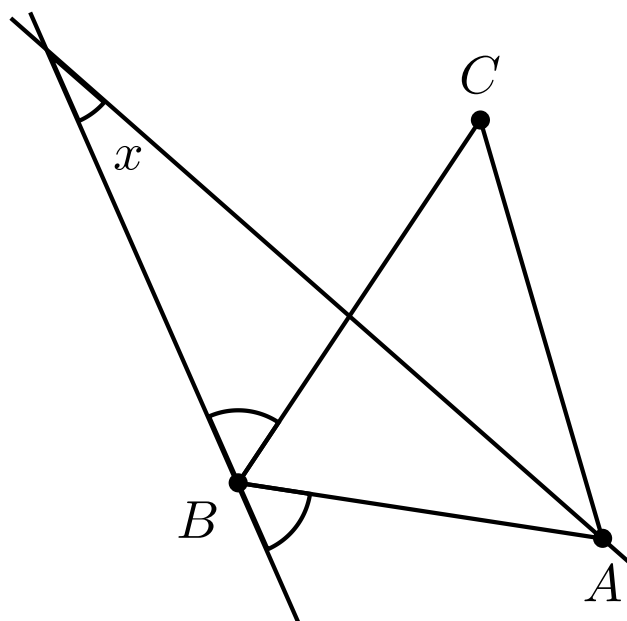


Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2011-2012

Svör og lausnir

Efra stig



Fyrsti hluti

1. Brotið $\frac{5^1 + 5^0 + 5^{-1}}{5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3}}$ er jafnt

$\frac{1}{125}$

$\frac{1}{25}$

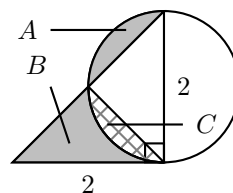
25

125

Skýring: Ef margfaldað er í teljara og nefnara með 5^3 þá umritast brotið

$$\frac{(5^1 + 5^0 + 5^{-1})5^3}{(5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3})5^3} = \frac{5^4 + 5^3 + 5^2}{5^2 + 5^1 + 5^0} = \frac{5^2(5^2 + 5^1 + 5^0)}{5^2 + 5^1 + 5^0} = 5^2$$

2. Myndin sýnir hring með þvermál 2 og rétthyrndan þríhyrning. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



$\pi - \frac{1}{2}$

1

$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

Skýring: Flatarmál skyggða svæðisins er jafnt samanlögðu flatarmáli svæðanna A og B. Þar sem svæði C er jafn stórt og svæði A þá er flatarmál svæðisins sem spurt er um jafnt flatarmáli þríhyrnings með grunnlínu 2 og hæð 1.

3. Gefið er að $2x + 3y = 6x - y$ og $x + y \neq 0$. Þá er $\frac{7x - y}{x + y}$ jafnt og

1

2

3

4

Skýring: Þar sem $2x + 3y = 6x - y$ þá er $4y = 4x$ og því $y = x$. Skilyrðið $x + y \neq 0$ tryggir þá að $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Þá má reikna

$$\frac{7x - y}{x + y} = \frac{7x - x}{x + x} = \frac{6x}{2x} = 3.$$

4. Ef $a < b < 0$ hvað af eftirfarandi er þá satt?

$a^2 < b^2$

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$a^3 > b^3$

$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$

Skýring: Veljum $a = -2$ og $b = -1$. Fullyrðingin í fjórða svarmöguleika er sú eina sem er rétt fyrir þetta tiltekna val á a og b . (Hinar ójöfnurnar þrjár yrðu sannar ef ójöfnumerkjunum væri snúið við.)

5. Ef $(\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{27})^x = \sqrt{3}$ hvert er gildið á x ?

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

Skýring: Þegar allar stærðir eru skrifaðar sem veldi af tölunni 3 fæst:

$$(3^{1/2})^x \cdot ((3^3)^{1/2})^x = 3^{1/2} \quad \text{eða} \quad 3^{x/2+3x/2} = 3^{1/2}.$$

Því er $\frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$, svo $x = \frac{1}{4}$.

6. Ef $x^2 + y^2 = 20$ og $x^2 - y^2 = 2$ hvert er gildið á $|xy|$?

$\frac{\sqrt{418}}{2}$

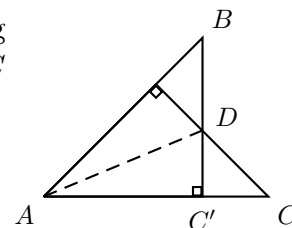
5

$\frac{5\sqrt{10}}{3}$

$3\sqrt{11}$

Skýring: Þegar jöfnurnar tvær eru lagða saman fæst að $2x^2 = 22$ svo $x^2 = 11$ og því $y^2 = 9$. Þá er $x^2y^2 = (xy)^2 = 99$ og þar með $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$.

7. Á myndinni eru hornin A , B og C öll 45° og strikin BD og CD eru framlengd hornrétt á AC og AB . Hver er lengd BC í cm ef lengd AD er 10 cm?



9

10

11

12

Skýring: Látum C' vera skurðpunkt framlengingar striks BD og striks AC . Þríhyrningurinn $DC'C$ er jafnarma, svo $C'D = C'C$. Einnig er þríhyrningurinn $AC'B$ jafnarma, svo $AC' = BC'$. Þá eru þríhyrningarnir $AC'D$ og $BC'C$ eins og því $AD = BC = 10$ cm.

8. Lausnarmengi ójafnanna $-x^2 \leq x \leq \sqrt{|x|}$ er

$] -\infty, 1]$

$[-1, 0]$

$[0, 1]$

$] -\infty, -1] \cup [0, 1]$

Skýring: Ef $x = -2$ þá eru ójöfnurnar sannar svo svarmöguleikar tvö og þrjú eru rangir. Ef $x = -1/2$ þá er ójafnan $-x^2 \leq x$ röng, svo rétti svarmöguleikinn er sá fjórði.

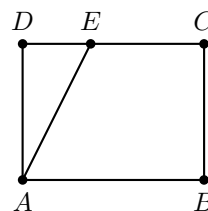
9. Það eru 24 fjögurra stafa tölur sem nota alla tölustafina 2, 4, 5 og 7. Aðeins ein af þessum tölum er margfeldi af annarri slíkri tölu. Hver er hún?

 5724 7245 7254 7425

Skýring: $7425 = 3 \cdot 2475$

(Hina möguleikana má útiloka með því að nota að margfeldið getur í mesta lagi verið þrefalt og því dugir að deila í tölurnar með 2 og 3.)

10. Flatarmál þríhyrningsins ADE er $1/5$ af flatarmáli ferhyrningsins $ABCE$. Hvert er hlutfallið $\frac{DE}{EC}$?

 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

Skýring: Flatarmál þríhyrningsins ADE er þá $1/6$ af flatarmáli alls rétthyrningsins $ABCD$:

$$F_{ABCD} = F_{ADE} + F_{ABCE} = F_{ADE} + 5 \cdot F_{ADE} = 6 \cdot F_{ADE}$$

Og rétthyrningur með hliðar AD og DE er þá $2/6 = 1/3$ af flatarmáli $ABCD$, svo að $DE = 1/3 \cdot DC$ og þá er $EC = 2/3 \cdot DC$. Því fæst að

$$\frac{DE}{EC} = \frac{1/3 \cdot DC}{2/3 \cdot DC} = \frac{1}{2}.$$

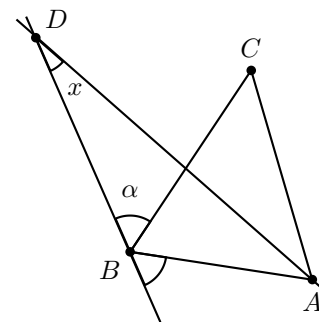
Annar hluti

11. Guðrún tekur bolla fullan af vatni og hellir $1/5$ af innihaldinu. Hún fyllir bollann síðan með olíu og hrærir vel. Hún hellir $1/4$ úr bollanum og fyllir svo með olíu og hrærir aftur. Að lokum hellir hún $1/3$ af blöndunni úr bollanum og fyllir eins og áður. Hve mörg prósent af blöndunni er olía?

Svar: 60%

Skýring: Eftir fyrstu hræru er blandan að $4/5$ hluta vatn. Eftir aðra hræru er blandan að $(4/5) \cdot (3/4) = 3/5$ hluta vatn og í lok síðustu hræru er blandan að $(3/5) \cdot (2/3) = 2/5$ hluta vatn. Blandan er því að $3/5$ hluta olía eða sem nemur 60%.

12. Í þríhyrningnum ABC er hornið C jafnt 50° . Helminglína hornsins A og lína sem dregin er hornrétt á helmingalínu hornsins B mynda hornið x . Hver er stærð hornsins x ?



Svar: 25°

Skýring: Ef D er skurðpunktur línanna sem mynda hornið x og $\alpha = \angle DBC$ þá er $\angle CBA + 2\alpha = 180^\circ$. Tvöfalda hornasummu þríhyrningsins DBA má rita

$$2x + (2\alpha + \angle CBA) + \angle CBA + \angle CAB = 360^\circ$$

svo

$$2x + \angle CBA + \angle CAB = 180^\circ.$$

En $50^\circ + \angle CBA + \angle CAB = 180^\circ$, svo $2x = 50^\circ$ og því $x = 25^\circ$.

13. Þrjá daga í röð ók Jón bíl sínum í vinnuna. Fyrsta daginn hélt Jón meðalhraða 40 km/klst og var 3 mínútum of seinn. Annan daginn hélt hann meðalhraða 60 km/klst og var 8 mínútum of fljótur. Þriðja daginn mætti Jón á réttum tíma í vinnuna. Hver var meðalhraði Jóns þann daginn?

Svar: 44 km/klst.

Skýring: Ef t táknar tímann í klukkustundum sem það tók Jón að aka í vinnuna þriðja daginn þá lýsir eftirfarandi jafna akstri Jóns fyrri dagana tvo:

$$40 \left(t + \frac{3}{60} \right) = 60 \left(t - \frac{8}{60} \right)$$

Lausn jöfnunnar er $t = \frac{1}{2}$ og vegalengdin í vinnuna er því $40 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{60} \right) = 22$ km. Það tók Jón því hálf klukkustund að aka 22 km þriðja daginn. Jón hefur því haldið meðalhraðanum 44 km/klst.

14. Lausnir jöfnunnar $x^2 - 85x + c = 0$ eru frumtölur (prímtölur). Hvert er gildið á c ?

Svar: 166

Skýring: Þar sem jafnan hefur frumtölulausnir má þátta vinstri hlið og rita á forminu $(x-p)(x-q)$ þar sem p og q eru frumtölulausnirnar. Þá er $p+q = 85$ og $c = pq$. Þar sem p og q eru frumtölur verður önnur talnanna að vera 2 (annars væru báðar tölurnar oddatölur og summan því slétt tala). Ef önnur talnanna er 2 þá verður hin að vera 83 svo summan verði 85. Þá er $c = 2 \cdot 83 = 166$.

15. Hversu margar ólíkar útkomur fást með því að leggja saman þrjár ólíkar tölur úr safninu $\{3, 6, 9, \dots, 27, 30\}$?

Svar: 22

Skýring: Minnsta mögulega summan er $3 + 6 + 9 = 18$ og stærsta mögulega summan er $24 + 27 + 30 = 81$. Summurnar eru allar margfeldi af 3 og því á forminu $15 + 3k$. Minnsta summan fæst með því að velja $k = 1$ og sú stærsta með því að velja $k = 22$. Heildarfjöldi mismunandi útkoma er því 22.

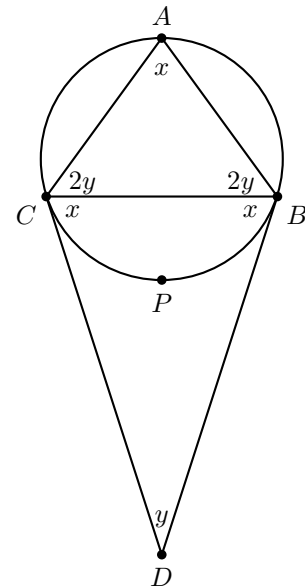
Þriðji hluti

16. Gefinn er hvasshyrndur jafnarma þríhyrningur ABC og umritaður hringur hans. Snertlar við hringinn í B og C skerast í D . Einnig er $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle CDB$. Finnið hornið $\angle CAB$.

Lausn: Köllum hornið $\angle CAB = x$. Þá er $\angle BCD = x$ og $\angle CBD = x$ því öll spanna þessi horn sama bogann CPB í hringnum. Köllum hornið $\angle CDB = y$. Hornasummur þríhyrninganna ABC og BCD má tákna með tilliti til x og y :

$$x + 4y = 180^\circ \quad \text{og} \quad 2x + y = 180^\circ$$

Þá fæst að $x + 4(180^\circ - 2x) = 180^\circ$ og því er $x = \frac{540^\circ}{7}$.



17. Finnið allar framtölur (þrímtölur) p , q og r þannig að $p > q > r$ og tölurnar $p - q$, $p - r$ og $q - r$ séu líka framtölur.

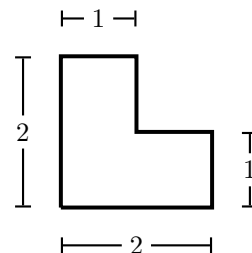
Lausn: Athugum fyrst að tölurnar p , q og r geta ekki allar verið oddatölur því þá væru framtölurnar $p - q$, $p - r$ og $q - r$ allar sléttar tölur og því allar jafnar 2 (einu sléttu framtölunni) sem er ómögulegt. Því má álykta að $r = 2$.

Framtölurnar p og q verða að vera oddatölur, svo framtalan $p - q$ er slétt og því er $p - q = 2$. En þá er $p = q + 2$, $p - r = q$ og $q - r = q - 2$, svo að q verður að vera framtala þannig að $q - 2$ og $q + 2$ séu líka framtölur.

Þar sem $q - 2$, q og $q + 2$ eru samliggjandi oddatölur er a.m.k. ein þeirra margfeldi af 3 og þar sem tölurnar eru allar framtölur er ein þeirra 3. Það verður að vera minnsta talan $q - 2$, svo $q = 5$ og $p = 7$. Auðvelt er að sjá að þessar tölur uppfylla skilyrði dæmisins.

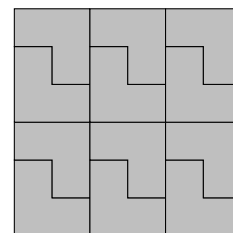
Einu framtölurnar sem uppfylla gefnu skilyrðin eru því $r = 2$, $q = 5$ og $p = 7$.

18. Ferningur hefur hliðarlengdina n þar sem n er heil tala. Ferninginn á að þekja með L -laga hellum sem allar eru í laginu eins og myndin sýnir. Hver er minnsta talan n þannig að þetta sé framkvæmanlegt?

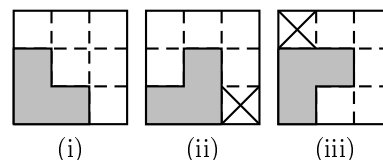


Lausn: Þar sem hver L -laga hella þekur þrjár flatareiningar þá verður flatamál ferningsins að vera margfeldi af þremur og því verður hliðalengd ferningsins að vera margfeldi af þremur (annars væri hliðarlengdin $n = 3k + 1$ eða $n = 3k + 2$ og þar með $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ eða $n^2 = 3(3k^2 + 6k + 1) + 1$).

Tvær hellur má leggja saman og mynda 3×2 ferhyrning, svo ferning af stærð 6×6 er hægt að þekja með hellunum. Við sýnum að $n = 6$ er minnsta hliðarlengd slíks fernings með því að rökstyðja að ferning með hliðarlengd $n = 3$ er ekki hægt að þekja.



Hella sem þekur eitt af hornum 3×3 fernings getur snúið á þrjá vegu og sýnt er á mynd. En hvernig sem henni er snúið nær hún ekki að þekja neitt af hinum hornunum. Þess vegna þarf a.m.k. fjórar hellur til að hægt sé að þekja öll fjögur hornin, en flatarmál 3×3 fernings er 9 sem rúmar í mesta lagi þrjár hellur. Því er ekki hægt að þekja ferninginn.



19. Leysið jöfnuna $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$.

Lausn: Látum $a = \sqrt[3]{x+9}$ og $b = \sqrt[3]{x-9}$. Þá er

$$a - b = 3, \quad a^3 = x + 9 \quad \text{og} \quad b^3 = x - 9.$$

Nú er

$$27 = 3^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3.$$

Því má rita $27 = (x + 9) - 9ab - (x - 9) = 18 - 9ab$ svo $ab = -1$. Þar með er $a^3b^3 = -1$ en þessa jöfnu má rita á forminu

$$(x + 9)(x - 9) = -1 \quad \text{eða} \quad x^2 = 80$$

Þá fæst að $x = \pm\sqrt{80} = \pm 4\sqrt{5}$.