

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2009–2010 Úrslitakeppni

Dæmi 1

Látum n vera einhverja jákvæða heiltölu aðra en 2, 3 eða 5. Sýnið að ferning megi klippa sundur í nákvæmlega n minni ferninga (sem geta verið misstórir).

Dæmi 2

Fall f uppfyllir

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

fyrir allar rauntölur x . Ákvarðið $f(2)$ og finnið formúlu fyrir f .

Dæmi 3

Finnið fjóra frumþætti tölunnar $3^{32} - 2^{32}$ sem eru lægri en 100.

Dæmi 4

Ef x , y og z eru rauntölur á bilinu $[-2, 1]$ og $x + y + z = 0$, sýnið að

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 6.$$

Dæmi 5

Í þríhyrningi ABC er $\angle ABC = 2\angle ACB$. Sannið að

(a) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$

(b) $AB + BC < 2AC$

Dæmi 6

Sýnið, fyrir allar heiltölur $n > 1$, að summan

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

sé ekki heiltala.