

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2012–2013 Úrslitakeppni

Dæmi 1

Látum a, b, c, d, e, f og g vera ólíkar jákvæðar heiltölur minni en eða jafnar 7. Finnið allar frumtölur (prímtölur) sem hægt er að rita á forminu:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d + e \cdot f \cdot g$$

Dæmi 2

Í trapisu $ABCD$ eru mótlægu hliðarnar AB og CD samsíða, $|AB| = a$, $|CD| = b$ og hornalínurnar AC og BD skerast í punkti E . Strikið FG liggur gegnum E samsíða AB og hefur endapunkta sína á hliðunum BC og AD . Táknið $|FG|$ út frá a og b .

Dæmi 3

Hring er skipt í n jafnstóra boga. Tölunum $1, 2, \dots, n$ er dreift á bogana (einni tölu á hvern boga) þannig að fjöldi boga milli talanna a og $a + 1$ er alltaf sá sami, fyrir öll a frá 1 til $n - 1$. Tölurnar 11, 4 og 17 falla í þessari röð á samliggjandi boga. Finnið hver talan n er og rökstyðjið hvers vegna þetta er eini möguleikinn.

Dæmi 4

Í hvasshyrndum þríhyrningi ABC eru AD , BE og CF hæðirnar á tilsvareandi hliðar og H skurðpunktur þeirra. Sýnið að eftirfarandi jafna gildi:

$$\frac{|AH|}{|AD|} + \frac{|BH|}{|BE|} + \frac{|CH|}{|CF|} = 2$$

Dæmi 5

Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að

$$\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

verði ræð tala.

Dæmi 6

Látum $f_1 = f_2 = 1$ og $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ fyrir $n \geq 1$. Sýnið að þá gildi:

$$1 - \frac{1}{10^{300}} < \frac{f_1}{f_2 f_3} + \frac{f_2}{f_3 f_4} + \dots + \frac{f_{2011}}{f_{2012} f_{2013}} < 1$$