Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2024–2025
Úrslitakeppni

Athugið: Notið aðskilin blöð fyrir hvert dæmi. Notið eina hlið hvers blaðs. Merkið öll blöð með nafni. Þetta skiptir máli við yfirferð. Engar reiknivélar eru leyfðar. Rökstyðjið öll svör skriflega.

Dæmi 1
Gefin eru tíu hólf með níu tölum, aftasta hólfið er tómt. Hægt er að færa tölu úr sínu hólfi í tóma hólfið. Þetta er talin ein aðgerð. Eftir það er hólfið sem talan var í orðið tómt. Upphaflega er röð talnanna $8, 7, 3, 9, 1, 5, 2, 6, 4$. Hvað þarf margar aðgerðir í minnsta lagi til að fá tölurnar í vaxandi röð, með tóma hólfið aftast aftur. Hvers vegna er ekki hægt að gera það í færri aðgerðum en svo?

Dæmi 2
Finnið allar jákvæðar rauntölur x þannig að

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 91} = 91.$$

Dæmi 3
Gefinn er ferhyrningur $ABCD$. Látum X vera skurðpunkt hornalína hans og gerum ráð fyrir að X sé innan í $ABCD$. Látum $[PQR]$ tákna flatarmál þríhyrningsins með hornpunkta P, Q og R. Sýnið að

$$[ABX] \cdot [DCX] = [BCX] \cdot [DAX].$$

Dæmi 4
Fjölskyldan hans Benna, sem er $n \geq 1$ manna fjölskylda, horfir reglulega á þætti saman. Hvað þau horfa á fer eftir hverjir eru viðstaddir, svo úthluta þarf sérhverju (ekki tómu) hlutmengi fjölskyldunnar þætti til að horfa á. Til að forðast endurtekningu mega tvö hlutmengi ekki horfa á sömu þættina ef þau skarast. Hvað þarf fjölskyldan að finna margar þáttaraðir í minnsta lagi?

Dæmi 5
Látum heiltölu $m \geq 3$ vera gefna. Köllum heiltölu x *góða* ef $m \mid (x-1)$ og $m(m-1) \mid x(x-1)$. Hér táknar $a \mid b$ að a deili b án afgangs, sem sagt að a gengur upp í b. Við segjum að a deilir b ef til er heiltala k þannig að $b = a \cdot k$. Hvað eru margar góðar tölur stærri en 0 og minni en $m(m-1)$ ef $m = 2025$? En hvað með almennt m?

Dæmi 6
Festum heila tölu $k > 0$. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ þannig að fyrir öll $n > 0$ gildi

$$f(f(n)) = n + k.$$