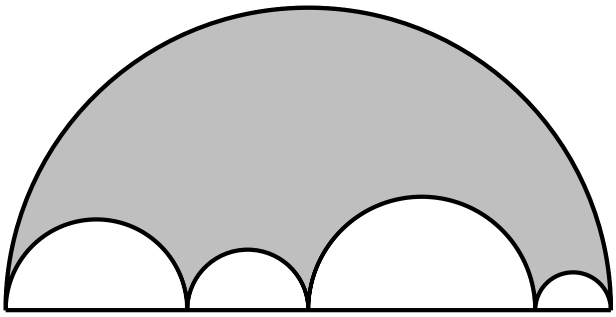
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2014–2015

Svör og lausnir

Neðra stig



Landsnet styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Hvert er gildið á $10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)^{-1}$?

☐ $\frac{7}{2}$ ☐ 8 ☒ $\frac{25}{2}$ ☐ $\frac{170}{3}$

Skýring: $10 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)^{-1} = 10 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{-1} = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = 10 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{2}$

2. Jón gekk framhjá fjórum húsum í röð, í sínum lit hvert. Hann gekk framhjá appelsínugula húsinu á undan rauða húsinu. Hann gekk framhjá bláa húsinu á undan gula húsinu. Bláa húsið er ekki við hliðina á gula húsinu. Á hve marga vegu getur röð húsanna verið?

☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5

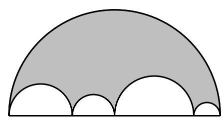
Skýring: Ef staðsetningar bláa og gula húsins eru þekktar ákvarðast staðsetningar appelsínugula og rauða húsins ótvírætt. Bláa húsið er á undan því gula og þau eru ekki hlið við hlið svo mögulegar staðsetningar fyrir þau eru fyrsta og þriðja, fyrsta og fjórða og að síðustu annað og fjórða.

3. María Erla telur fugla fyrir Náttúruverndarsamtökin. Einn daginn telur hún þrjár tegundir fugla, lóur, spóa og hrossagauka. $2/3$ fuglanna eru hrossagaukar, $1/8$ eru lóur og hún telur nákvæmlega 5 spóa. Hversu marga hrossagauka taldi María Erla?

☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☒ 16

Skýring: Spóarnir fimm eru $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ af öllum töldum fuglum. María taldi því alls 24 fugla. Fjöldi taldra hrossagauka er þá $\frac{2}{3} \cdot 24 = 16$.

4. Fimm hálfhringir eru með miðju á einni og sömu línunni. Þvermál stærsta hálfhringsins er 2, jafnt samanlögðu þvermáli fjögurra minni hringjanna. Hvert er flatarmál fernings sem hefur sama ummál og skyggða svæðið?



☐ 2 ☐ 4 ☐ π^2 ☒ $\pi^2/4$

Skýring: Þar sem samanlagt þvermál litlu hálfhringjanna fjögurra er jafnt þvermáli stærsta hálfhringsins þá skipta stóri hálfhringurinn, annars vegar og fjórir litlu, hins vegar, ummáli skyggða svæðisins jafnt á milli sín. Ummál svæðisins er því tvöföld ferilengd stóra hálfhringins eða 2π. Ferningur með sama ummál hefur þá hliðarlengdir $\pi/2$ og flatarmálið $\pi^2/4$.

5. Ef $|x-2| = p$ og $x < 2$ þá er $x - p$ jafnt og

☐ 2 ☒ $2-2p$ ☐ $2p-2$ ☐ $|2p-2|$

Skýring: Þar sem $x < 2$ þá er $|x-2| = 2-x$. Jafnan verður því $2-x=p$. Þá er $x = 2-p$ og því $x-p = 2-2p$.

6. Kaupmaður kaupir 1200 kg af káli, sem er að 98 prósentum vatn og setur í geymslu. Viku síðar, þegar kaupmaðurinn sækir kálið er það að 97 prósentum vatn. Hversu mikið vegur kálið þá?

☐ 750 kg ☒ 800 kg ☐ 950 kg ☐ 1080 kg

Skýring: Látum $\mathbf{X}$ tákna þyngd kálsins viku síðar. Hluti vatns hefur gufað upp en magn fastra efna helst óbreytt, svo 2% af 1200 kg vegur jafnt og 3% af $\mathbf{X}$, það er $\frac{2}{100} \cdot 1200 = \frac{3}{100} \cdot \mathbf{X}$. Þá er $\mathbf{X} = 800$.

7. Hve mörg hlutmengi í menginu $\{a, b, c, d, e, f\}$ innihalda bæði a og b?

☐ 9 ☐ 12 ☒ 16 ☐ 25

Skýring: Fyrir hvert stakanna c, d, e og f eru tveir möguleikar; annað hvort er stakið með í hlutmenginu eða ekki. Fjöldi möguleika er því $2^4 = 16$.

8. Fjórar stelpur, Anna, Bára, Dagný og Elín sungu á tónleikum og aðeins þrjár saman hvert lag. Elín söng í flestum laganna, alls sjö og Anna söng í fæstum laganna, alls fjórum. Hve mörg lög sungu stelpurnar á tónleikunum?

☒ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 11

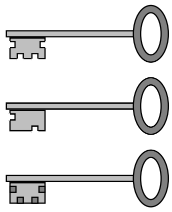
Skýring: Notum upphafsstafi stelpnanna til að tákna fjölda laga sem þær sungu í. Við höfum þá $4 = A < B, C < E = 7$. Þær sungu 3 í hverju lagi svo $A+B+C+D$ er deilanleg með 3 og $21 = 4+5+5+7 \leq A+B+C+D \leq 4+6+6+7 = 23$. Þar með er ljóst að $A+B+C+D = 21$ og lagafjöldinn var $21/3 = 7$.

9. Hvert er gildið á $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}$ ef $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 3$?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Skýring: $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} = \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2} = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 3 + 2 = 5.$

10. Lykill er búinn til með því að klippa út einn eða fleiri dökku bitanna sem sjást á neðsta lykli myndar. Efri lyklar myndar eru dæmi um rétt gerða lykla. Hversu marga mismunandi lykla er hægt að gera með þessu móti?



☒ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 18

Skýring: Dökku bitarnir eru fjórir og fyrir hvern bita eru tveir möguleikar, klippa eða ekki. Möguleikarnir eru því alls $2^4 = 16$, en þá er meðtalinn sá möguleiki að enginn bútanna sé klipptur út, sem er ekki rétt gerður lykill. Fjöldi mismunandi lykla er því $16 - 1 = 15$.

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm spurningar. Hver spurning er fjögurra stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

11. Í poka með kúlum eru 3/5 kúlnanna bláar og restin rauðar. Hvert verður hlutfall rauðu kúlnanna ef fjöldi þeirra er tvöfaldaður en fjöldi bláu kúlnanna helst óbreyttur?

☐ $\dfrac{2}{5}$ ☐ $\dfrac{3}{7}$ ☒ $\dfrac{4}{7}$ ☐ $\dfrac{3}{5}$ ☐ $\dfrac{4}{5}$

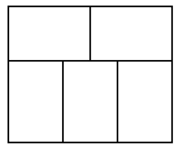
Skýring: Svarið er óháð heildarfjölda kúlna. Ef gert er ráð fyrir að kúlurnar séu alls fimm þá eru tvær rauðar. Ef tveimur rauðum er bætt í pokann verða kúlurnar alls sjö og þar af 4 rauðar.

12. Gefið er að x og y eru rauntölur, hvorug núll og $x \neq y$. Hvert er gildið á xy ef $x + \dfrac{2}{x} = y + \dfrac{2}{y}$?

☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☒ 2 ☐ 4

Skýring: Ef $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$ þá er $x - y = \frac{2}{y} - \frac{2}{x} = \frac{2(x-y)}{xy}$. Nú er $x - y \neq 0$ og því er $1 = \frac{2}{xy}$ sem þýðir að $xy = 2$.

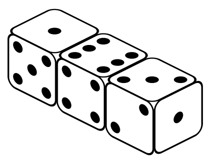
13. Rétthyrningur er samsettur úr 5 eins rétthyrningum eins og myndin sýnir. Hvert er flatarmál stóra rétthyrningsins ef vitað er að ummál hvers lítils rétthyrnings er 20 m?



☐ 72 m² ☐ 112 m² ☒ 120 m² ☐ 140 m² ☐ 150 m²

Skýring: Táknum skammhlið lítils rétthyrnings með x og langhlið með y. Þá er $2x + 2y = 20\,\mathrm{m}$. Einnig sést á mynd að $2y = 3x$. Séu þessar tvær jöfnur leystar saman fæst að $x = 4\,\mathrm{m}$ og $y = 6\,\mathrm{m}$. Flatarmál stóra rétthyrningsins er þá $(x + y) \cdot 2y = (x + y) \cdot 3x = 10\,\mathrm{m} \cdot 12\,\mathrm{m} = 120\,\mathrm{m}^2$.

14. Þremur teningum með tölunum einn upp í sex er raðað eins og sýnt er á mynd. Sjö hliðar teninganna eru sýndar. Hver er samanlagður fjöldi punkta sem **sjást ekki**?



☐ 21 ☐ 22 ☐ 31 ☒ 41 ☐ 53

Skýring: Hver teningur hefur $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ punkt, svo samanlagt hafa teningarnir $3 \cdot 21 = 63$ punkta. Sjáanlegir punktar eru alls 22. Fjöldi punkta sem sjást ekki er því $61 - 22 = 41$.

15. Að morgni dags, þegar Jón leggur af stað í ferðalag, falla vísarnir á armbandsúri hans saman milli 8 og 9. Ferðalagi Jóns lýkur í eftirmiðdaginn, milli kl. 14 og 15, þegar að vísarnir mynda $180°$ horn (liggja á beinni línu). Hversu lengi var Jón á ferðalaginu?

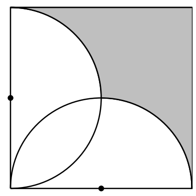
☐ 5 klst og 17 mín ☐ 5 klst og 43 mín ☒ 6 klst ☐ 6 klst og 30 mín ☐ 6 klst og 43 mín

Skýring: Í upphafi ferðar falla vísarnir saman milli 8 og 9. Eftir einn hring stóra vísis hefur litli vísir færst um eina klst. og er á milli 9 og 10. Eftir 6 hringi stóra vísis hefur litli vísir færst um sex klst., er á milli kl. 14 og 15 og hornið milli vísanna er $180°$.

Þriðji hluti

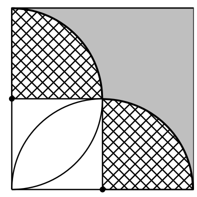
Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16. Tveir hálfhringir eru innritaðir í ferning með hliðarlengd 2. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



Svar: $3 - \pi/2$

Skýring: Skástrikuðu hringgeirarnir tveir eru jafnstórir og samanlagt flatarmál þeirra er jafn flatarmáli hálfhrings með geisla (radíus) 1. Óskyggða svæðið er ferningur með hliðarlegnd 1. Umbeðið flatarmál er því $4 - (1 + \pi/2) = 3 - \pi/2$.



17. Það tekur hóp múrara 5 klst. að ljúka ákveðnu múrverki. Væru þeir einum fleiri tæki sama verk 4 klst. Allir vinna jafn hratt og jafn mikið. Hve langan tíma tæki það einn múrara að ljúka verkinu?

Svar: 20 klst.

Skýring: Ef hópurinn telur N múrara þá gildir að $N \cdot 5 = (N + 1) \cdot 4$, svo $N = 4$. Vinnustundir hópsins eru því 20 klst. Þar sem allir vinna jafn hratt tæki það einn múrara 20 klst. að ljúka verkinu.

18. Tölurnar a, b, c, d og e uppfylla jöfnurnar

$$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5.$$

Hver talnanna fimm er stærst?

Svar: b

Skýring: Jöfnurnar fjórar leiða til samanburðar:

$$\text{(i) } a + 3 = c, \quad \text{(ii) } b = d + 5, \quad \text{(iii) } c + 7 = e, \quad \text{(iv) } a + 9 = d$$

Til samans sýna (i) og (iii) að $a + 10 = e$; (ii) og (iv) að $a + 14 = b$. Þá má raða tölunum

$$a, \quad c = a + 3, \quad d = a + 9, \quad e = a + 10, \quad b = a + 14.$$

19. Maður tínir epli og heldur síðan heim til sín. Á leiðinni heim þarf hann að stoppa á þremur tollstöðvum. Á hverri tollstöð er hann beðinn um toll sem nemur helmingi þeirra epla sem hann er með og eitt að auki. Þegar maðurinn kemur heim er hann með eitt epli. Hve mörg epli tíndi maðurinn?

Svar: 22

Skýring: Ef fjöldi epla sem maðurinn kemur með að tollstöð er $\mathbf{I}$ þá yfirgefur hann tollstöðina með $\acute{\mathrm{U}} = \mathbf{I} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + 1\right) = \frac{1}{2}\mathbf{I} - 1$. Svo $\mathbf{I} = 2\acute{\mathrm{U}} + 2$. Þar sem maðurinn yfirgaf þriðju tollstöð með eitt epli þá kom hann að þeirri tollstöð með $2 \cdot 1 + 2 = 4$ epli. Þá hefur hann komið að annarri tollstöð með $2 \cdot 4 + 2 = 10$ epli og þar með að fyrstu tollstöðinni með $2 \cdot 10 + 2 = 22$ epli sem er fjöldi tíndra epla.

20. Hvert er gildið á x ef $\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}$?

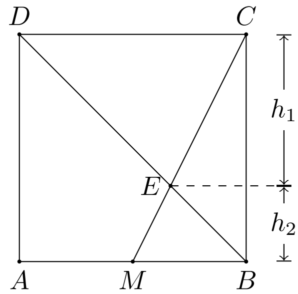
Svar: 4

Skýring: Jöfnuna má umrita á formið $\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$. Þá má álykta að $x = 2 + \sqrt{x}$ og því $x - \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$. Þar sem $\sqrt{x} + 1 \neq 0$ verður $\sqrt{x} - 2 = 0$ og þar með $x = 4$.

Fjórði hluti

Í þessum hluta eru tvö dæmi og er hvort dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

21. Punktur M er miðpunktur hliðar AB í ferningi $ABCD$. Punktur E er skurðpunktur hornalínu BD og miðlínu CM. Hvert er hlutfall flatarmáls þríhyrnings BCE og ferhyrnings $ADEM$?



Lausn A: Athugum fyrst, að umbeðið hlutfall er óháð hliðarlengd ferningsins $ABCD$. Lausnin sem hér er sýnd gerir ráð þó fyrir að hliðarlengdin sé einhver óþekkt tala l.

Þríhyrningarnir CDE og BEM eru einslaga og þar sem M er miðpunktur hliðar AB þá eru hliðarlengdir þríhyrninganna í hlutföllunum $1 : 2$. Hæðir þríhyrninganna, h_1 og h_2, eru í sömu hlutföllunum svo $h_1 = 2l/3$ og $h_2 = l/3$. Hornalínan BD skiptir ferningnum í tvo jafna hluta og því má reikna eftirfarandi:

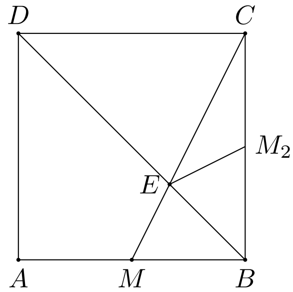
Flatarmál $F(BCE)$: $\quad \frac{1}{2}l^2 - F(CDE) = \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{3}l^2 = \frac{1}{6}l^2$

Flatarmál $F(ADEM)$: $\quad \frac{1}{2}l^2 - F(BEM) = \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{12}l^2 = \frac{5}{12}l^2$

Þá fæst umbeðið hlutfall $\frac{l^2/6}{5l^2/12} = \frac{2}{5}$.

Ath: Það er líka hægt að reikna að $h_2 = l/3$ með því að innleiða hnitakerfi og finna skurðpunkt línanna.

Lausn B: *(Álfheiður Edda Sigurðardóttir, MR)*
Þríhyrningurinn ABD spannar hálfan ferning $ABCD$. BCM spannar hálfan helming $ABCD$, þ.e. fjórðung $ABCD$. Sé settur miðpunktur M_2 á hliðina BC kemur fram þríhyrningurinn BEM_2 sem er bæði einslaga og jafnstór BEM. Ennfremur hafa þríhyrningarnir CEM_2 og BEM_2 bæði sömu grunnlínu (BC) og sömu hæð (h_E) og hafa því sama flatarmál. [*Réttara væri að segja að þeir séu með jafnlangar grunnlínur* $BM_2 = CM_2$.]



Samanlagt mynda þeir þríhyrninginn $BCM = \frac{1}{4}ABCD$.
Hver um sig er þá $\frac{1}{12}ABCD$ og $BCE = \frac{1}{6}ABCD$. Nú vill svo skemmtilega til að BEM er akkúrat það sem $ADEM$ vantar uppá til að verða ABD svo $ADEM = ABD - BEM = \frac{1}{2}ABCD - \frac{1}{12}ABCD = \frac{5}{12}ABCD$ svo hlutföllin milli $ADEM$ og BCE eru þá $5 : 2$.

22. Finnið öll pör (a, b) jákvæðra heiltalna sem eru þannig að $a > b$ og mismunur stærðanna $a^2 + b$ og $a + b^2$ er frumtala (prímtala).

Lausn: Þar sem $a > b > 0$ þá er $a^2+b > a+b^2$ svo mismunurinn $(a^2+b)-(a+b^2)$ á að vera frumtala. En

$$\begin{aligned}(a^2 + b) - (a + b^2) &= (a^2 - b^2) - (a - b)\\ &= (a - b)(a + b) - (a - b)\\ &= (a - b)(a + b - 1).\end{aligned}$$

og $(a - b)(a + b - 1)$ er ekki frumtala nema $a - b = 1$ eða $a + b - 1 = 1$. Þar sem $b \geq 1$ þá er $a + b - 1 > a - b$ og því verður að gilda að $a - b = 1$ og þar með $a = b + 1$. Þá er $(a - b)(a + b - 1) = 1 \cdot (a + b - 1) = (b + 1) + b - 1 = 2b$ sem er frumtala aðeins ef $b = 1$.
Það er því aðeins eitt slíkt par jákvæðra heiltalna, $(a, b) = (b + 1, b) = (2, 1)$.