

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2022–2023 Efra stig

Nafn: \_\_\_\_\_

Kennitala: \_\_\_\_\_ Sími: \_\_\_\_\_

Heimilisfang: \_\_\_\_\_ Póstnúmer: \_\_\_\_\_

Netfang: \_\_\_\_\_

Skóli: \_\_\_\_\_ Bekkur eða áfangi: \_\_\_\_\_

Námsár í framhaldsskóla:  1.  2.  3. eða síðar

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

### Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

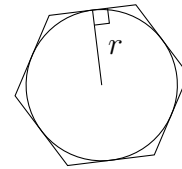
## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Tilraunarglas inniheldur eina bakteríu. Eftir tvær mínútur skiptir bakterían sér í tvær nákvæmlega eins bakteríur. Eftir tvær mínútur í viðbót skipta þessar tvær bakteríur sér aftur, svo þær eru þá orðnar fjórar. Svona heldur þetta áfram og eftir nákvæmlega klukkustund er tilraunaglassið orðið fullt. Hvað hefði það tekið langan tíma ef glasið hefði byrjað með fjórar slíkar bakteríur?

30 mínútur     56 mínútur     58 mínútur     60 mínútur

2. Hringur með geisla af lengd  $r = 2\sqrt{3}$  snertir allar hliðar reglulegs sexhyrnings. Hver er hliðarlengd sexhyrningsins?

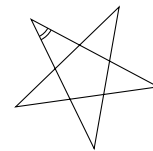


1                       2                       3                       4

3. Ef  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er fall,  $f(1) = 3$  og  $f(x) - f(y) = x - y$ , hvað er þá  $f(20)$ ?

-1                       3                       20                       22

4. Hve stór eru hornin í fimmhyrndri reglulegri stjörnu?



$36^\circ$                         $45^\circ$                         $48^\circ$                         $54^\circ$

5. Stærðin  $\sqrt{89 + 12\sqrt{55}}$  er jöfn:

$\sqrt{5} + 4\sqrt{11}$       $2\sqrt{5} + 3\sqrt{11}$       $3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$       $4\sqrt{5} + \sqrt{11}$

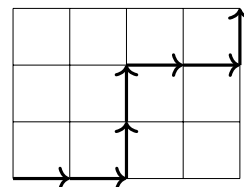
6. Fótbolti er samsettur úr 12 fimmhyrningum og 20 sexhyrningum. Hver hornpunktur liggur að nákvæmlega þremur marghyrningum. Hvað eru margir hornpunktur á fótbolta?

30                       60                       90                       180

7. Setjum sem svo að  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  og  $E$  séu punktar á línu þannig að  $B$  sé á milli  $C$  og  $E$ ,  $C$  sé á milli  $A$  og  $E$  og  $D$  sé á milli  $A$  og  $B$ . Hvað eftirfarandi getur **ekki** gilt:

$C$  er á milli  $A$  og  $B$                         $B$  er á milli  $A$  og  $E$   
  $C$  er á milli  $A$  og  $D$                         $D$  er á milli  $B$  og  $E$

8. Hver er fjöldi leiða frá  $(0, 0)$  til  $(4, 3)$  með skrefunum til hægri  $\rightarrow$  og upp  $\uparrow$ ?



22                       24                       35                       128

9. Á borði liggja 7 evrumyntir. Framan á stendur hversu margar evrur myntin er og aftan á er myntin merkt einhverju landi evrópusambandsins. Hvað þarf að snúa við mörgum myntum til að vera viss um að allar einnar evru myntir á borðinu séu merktar DE?



2                       3                       4                       5

10. Jafnan  $x^3 - 8x^2 + 6x - 1 = 0$  í breytunni  $x$  hefur þrjár rauntölulausnir  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Hvert er gildið á  $a^2 + b^2 + c^2$ ?

52                       64                       80                       96

## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

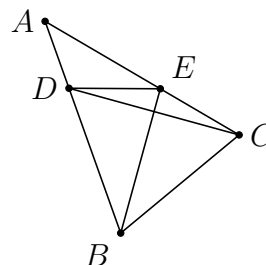
11. Hvaða heiltölur  $a$  og  $b$  uppfylla  $12^{2a+b} \cdot 18^{a+2b} = 36^3 \cdot 2^{3a+2b} \cdot 3^{a+6b-1}$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

12. Hve margar talnanna  $1, 2, \dots, 2022$  eru deilanlegar með 3 eða 5?

Svar: \_\_\_\_\_

13. Þríhyrningurinn  $\triangle BAC$  er jafnarma með hliðar  $AB$  og  $AC$  jafnlangar og  $\angle BAC = 40^\circ$ . Á strikinu  $AB$  er punktur  $D$  þannig að  $\angle ACD = 15^\circ$  og á strikinu  $AC$  er punktur  $E$  þannig að  $\angle ABE = 35^\circ$ . Hver er stærð hornsins  $\angle AED$ ?



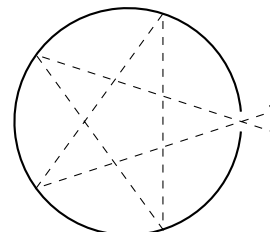
Svar: \_\_\_\_\_

14. Ritið eftirfarandi summu sem fullstýtt brot:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

Svar: \_\_\_\_\_

15. Í hliðinni á sívalningslaga stálröri er örlítið gat. Innra borð rörsins er fullkomlega speglandi. Á hve marga vegu má miða leysigeisla inn í gatið þannig að það speglist nákvæmlega 24 sinnum af innra borði rörsins áður en hann fer aftur út um gatið? Til hliðar er ferill geisla sem speglast nákvæmlega fjórum sinnum.



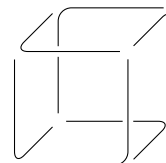
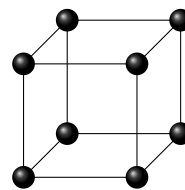
Svar: \_\_\_\_\_

## Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

- 16.** Gutti er að leggja saman jákvæðar heiltölur  $a$  og  $b$  í vasareikni en gleymir að stimpla inn síðasta tölustaf  $a$ , sem er 3, og fær út 222. Ef hann hefði gleymt að stimpla inn síðasta tölustaf  $b$  í stað síðasta tölustafs  $a$  hefði útkoman verið 500. Hverjar eru tölurnar  $a$  og  $b$ ?

- 17.** Marteinn ætlar að búa til tening eins og á mynd úr nokkrum bútum af vír sem hann beygir og kennaratyggjói. Hann vill hafa teninginn þannig að ekki sé meira en einn vír á hverri brún teningsins. Hver er minnsti fjöldi vírbúta sem hann getur framkvæmt þetta með? *Til hægri er sýnt hvernig Marteinn gæti smíðað teninginn með 6 vírbútum.*



**18.** Finnið öll föll  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  þannig að um öll  $x, y \in \mathbb{R}$  gildi:

$$f(x + f(y)) = x^2 + 2xf(y) + f(y^2)$$

- 19.** Látum  $ABC$  vera rétthyrndan þríhyrning með rétt horn í  $B$ . Látum  $M$  vera miðpunkt striksins  $BC$ . Látum  $\ell$  vera línuna gegnum  $C$  hornrétt á línuna  $BC$ . Punkturinn  $D$  er á línunni  $\ell$  þannig að  $\angle AMD$  sé rétt. Sýnið að hálfínan  $AM$  sé helmingalína hornsins  $\angle BAD$ .