

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2011–2012

Úrslitakeppni

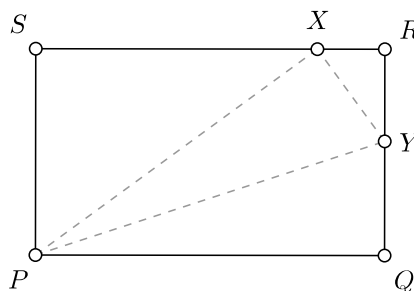
Dæmi 1

Finnið öll pör af rauntölum p og r sem leysa jöfnurnar:

$$\begin{aligned}p + pr + pr^2 &= 28 \\ p^2r + p^2r^2 + p^2r^3 &= 224\end{aligned}$$

Dæmi 2

Rétthyrningurinn $PQRS$ táknar A4-blað, það er $PQ : PS = \sqrt{2} : 1$. Rétthyrningurinn (blaðið) er brotinn þannig að hornið Q leggst í punktinn X á hliðinni SR og brotalinan PY liggur um punktinn P . Lengd hliðarinnar PS er 1. Finnið hliðarlengdir þríhyrningsins RXY .



Dæmi 3

Sannið að fyrir sérhverjar fimm heiltölur sé alltaf hægt að finna tvær þeirra, sem eru annað hvort þannig að summa þeirra eða mismunur sé deilanlegur með 7.

Dæmi 4

Finnið allar jákvæðar heiltölur m og n þannig að m gengur upp í $2n - 1$ og n gengur upp í $2m - 1$.

Dæmi 5

Í ferhyrningi $ABCD$ eru hornin $\angle ADC$ og $\angle BCD$ stærri en 90° , F er skurðpunktur línunnar AC og línu gegnum B samsíða AD og E er skurðpunktur línunnar BD og línu gegnum A samsíða BC . Sannið að EF er samsíða CD .

Dæmi 6

100 lampar mynda ferning sem er 10 lampar á breidd og 10 lampar á hæð. Á sérhverjum lampu er hnappur. Ef ýtt er á hnappinn á einhverjum lampu breyta allir lampar í sama dálki og allir lampar í sömu línu auk lampans sjálfs um ástand, þ.e. það kviknar á þeim sem slökkt var á og það slökknar á þeim sem kveikt var á. (Lampar sem hvorki eru í sömu línu né sama dálki haldast óbreyttir á meðan.)

Fyrir hvaða upphafstöður er hægt að kveikja á öllum lömpunum? M.ö.o. á hvaða lömpum má vera kveikt og slökkt á í upphafi, svo að hægt sé með því að ýta á rofana að enda með ljós á öllum lömpunum?